

15/04 V. Правило множителей Лагранжа

1) Будем $\neq$ зад $J(u) \rightarrow \inf, u \in U \in E^n, (1) U = \{u \in U_0 : g_i(u) \leq 0, i = \overline{1, m}, g_i(u) = 0, i \in \overline{m+1, S}\}, (2) \text{ где } U_0 \subseteq E^n, \text{ ф-ция } J(u), g_i(u), i = \overline{1, S}, \text{ опр и непрерывны на } U_0$

Исследов-я зад (1)-(2) полезно ввести ф-цию Лаг.
 $L(u, \lambda) = J_0(u) + \sum_{i=1}^S \lambda_i g_i(u), u \in U_0, \lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_S), \lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$ (3) // т.е. все λ , соответ. огранич. типа нер-в ≥ 0 , а рав-в - $\forall$ т.к. зад min

// Зад. (3) нам нравится, п.т. хорошее мн-во; не нравится, п.т. $(S+1)$ пар-р λ //

// Правило мнот-й Лаг. связывает зад. (1)-(2) и (3) //

II (Правило ^(Необх. усл.) мнотит-й Лаг.) $\exists$ в зад. (1)-(2) U_0 - вып. замкн. мн-во, $u_* \in U$ - т. ^{$(J(u_*) \leq J(u), \forall u \in U_*(u_*), U_*(u_*) = \{u \in U_0 : \|u - u_*\| \leq \alpha_0\})$} мин тип зад. ф-ции $J(u), g_i(u), i = \overline{1, S}$

$\nabla f(u) = m \cdot y - u$ // $\nabla^* f(u) = 0, i=1, m$ (6) // $\| \nabla^* \| = 1$, т.к. $\nabla \neq 0 \Rightarrow \text{есть } 1 \text{ yp-m}$

// IF (u_*, ∇^*) удовн. (м-б), то u (u_*) удовн., $d > 0$

u_* — какая-либо функ. т. лос мин. Зведем мн-во

$\{ = m+4, S \} = U \cap S(u_*)$ (8)

Такая new заг. хороша тем, что она имеет

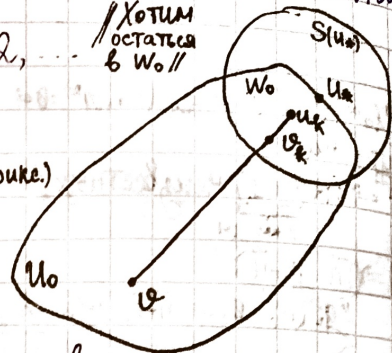


k -го зог. (8) непрерывным чет. выпр. и непрерывем k зог. $P_k(u) = g_k(u)$.
 $+ A_k \sum_{i=1}^s (g_i^+(u))^2 = \left\| \sum_{i=1}^s (g_i^+(u))^2 = \sum_{i=1}^m (\max\{g_i(u), 0\})^2 + \sum_{i=m+1}^s |g_i(u)|^2 \right\| = \sum_{u \in C} g(u) + \|u - u_k\|^2 +$
 $+ A_k \sum_{i=1}^s (g_i^+(u))^2 \rightarrow \inf_{u \in W_0}, u \in W_0, k=1, 2, \dots \quad (9) \quad \inf_{u_0} g_0(u) > -\infty; u_k = \arg \min_{u_0} P_k(u)$

$\| \Phi_k(u) \rightarrow \min \|$ к зад (9) применим неох. усл. опти-ти
 $\langle \Phi'_k(u_k), u - u_k \rangle \geq 0, \forall u \in W_0 = U_0 \cap S(u^*), k = 1, 2, \dots$ (11) $u_k = \arg \min_{U_0} \Phi_k(u)$
 Покажем, что пер-во (11) верно д/ всех $u \in U_0$ при достат. б/д

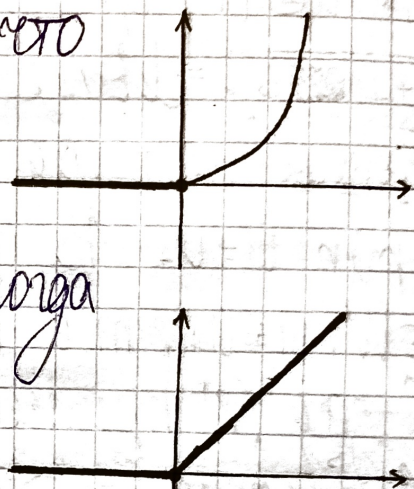
номеров $\forall k \geq k_0(u)$. Возьмем произвол. т. $v \in U_0$ и поопишем
 $(v_k = \alpha_k v + (1 - \alpha_k) u_k)$
 $v_k = u_k + \alpha_k (v - u_k)$, где $\{\alpha_k\} \rightarrow 0$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 1, 2, \dots$ // Хотим остаться в W_0 //

Заметим, что $v_k \in U_0$, т.к. U_0 — вып. Далее,
 $\|v_k - u_*\| \leq \|v_k - u_k\| + \|u_k - u_*\| = \alpha_k \|v - u_k\| +$
 $+ \|u_k - u_*\| \leq \gamma$, $\forall k \geq k_0(v)$ $\|v_k \in S(u_*)\|$



Поэтому $v_k \in U_0 \cap S(u_*) = W_0$, $\forall k \geq k_0(v)$, и в (11) можно
 принять $u = v_k$. Получим: $\langle \Phi'_k(u_k), v - u_k \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle \Phi'_k(u_k), \alpha_k (v - u_k) \rangle \geq 0$
 $\Leftrightarrow \langle \Phi'_k(u_k), v - u_k \rangle \geq 0$, $\forall v \in U_0$, $\forall k \geq k_0(v)$ // вариация кер-во // (12)

Перейдем к $\lim_{k \rightarrow \infty}$ в (12) и обнаружим, что
 все γ "спрятаны" в (12). Этой
 целью вычислим $\Phi'_k(u_k)$. Заметим, что



$\varphi(z) = (\max\{z, 0\})^2 \Rightarrow \varphi'(z) = 2 \max\{z, 0\}$, тогда

при $i = \overline{1, m}$: $\varphi(g_i(u)) = (\max\{g_i(u), 0\})^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial u} \varphi(g_i(u)) = 2 \max\{g_i(u), 0\} \cdot g'_i(u)$

$\Phi_k(u) = J(u) + \frac{1 + \|u - u_*\|^2}{2} \sum_{i=1}^s (g_i^+(u))^2$; а при $i = \overline{m+1, s}$: $(|g_i(u)|)^i = 2g_i(u)g'_i(u)$
 $\Rightarrow \Phi'_k(u_k) = J'(u_k) + 2(u_k - u_*) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{\alpha_k} \cdot 2g_i^+(u_k)g'_i(u_k) +$
 $+ \sum_{i=m+1}^s \frac{1}{\alpha_k} \cdot 2g_i(u_k)g'_i(u_k)$ (13)

$\mu_{ik} = \begin{cases} 2\alpha_k \max\{g_i(u); 0\}, & i = \overline{1, m} \\ |g_i(u)| \cdot \alpha_k \cdot 2, & i = \overline{m+1, s} \end{cases}$ Подставим (13) в (12) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \langle J'(u_k) + 2(u_k - u_*) + \sum_{i=1}^s \mu_{ik} g'_i(u_k), v - u_k \rangle \geq 0$, $\forall k \geq k_0(v)$ (14),
 $\forall v \in U_0$ // $L = J(u) + \sum \mu_{ik} g_i(u) \Rightarrow L' = J' + \sum \mu_{ik} g'_i$

Обозначим $\mu_{ik} = (\mu_{1k}, \dots, \mu_{sk})$, $\|\mu_{ik}\|^2 = \sum_{i=1}^s \mu_{ik}^2$.

Поделим (14) на $\sqrt{1 + \|\mu_{ik}\|^2} \geq 1 > 0 \Rightarrow \langle \frac{1}{\sqrt{1 + \|\mu_{ik}\|^2}} (J'(u_k) +$
 $+ 2(u_k - u_*)) + \sum_{i=1}^s \frac{\mu_{ik}}{\sqrt{1 + \|\mu_{ik}\|^2}} g'_i(u_k), v - u_k \rangle \geq 0$, $\forall k \geq k_0(v)$ (15), $\forall v \in U_0$

Заметим, что $\rho_{ik} = \frac{\mu_{ik}}{\sqrt{1 + \|\mu_{ik}\|^2}}$, $0 < \rho_{ik} \leq 1$; $\rho_{ik} = \rho_{ok} \mu_{ik} =$

$$= \lambda_{0k} \cdot 2 \lambda_{ik} g_i(u_k) \geq 0 \quad (16) // \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0 //$$

$$\sum_{i=0}^s \lambda_{ik}^2 = \lambda_{0k}^2 + \sum_{i=1}^s \lambda_{ik}^2 = \lambda_{0k}^2 + \sum_{i=1}^s \lambda_{0k}^2 \mu_{ik}^2 = \lambda_{0k}^2 (1 + \|\mu_{ik}\|^2) = 1 \quad (\text{из (16)})$$

III.0, посп-ть $\lambda_{ik} = (\lambda_{0k}, \dots, \lambda_{sk})$ ор. По Т. Больца-Вейерштрасса найдется хотя бы 1 подпослед-ть λ_{ki} , сходящаяся к т. $\bar{\lambda}^*$. III.к

$\|\bar{\lambda}^*\| = 1$, то $\|\bar{\lambda}^*\| = 1$ и $\lambda_{0k} > 0, \dots, \lambda_{mk} > 0 \Rightarrow$ при $k \rightarrow \infty$ получим

$\bar{\lambda}^* \neq 0, \lambda_0^* \geq 0, \lambda_1^* \geq 0, \dots, \lambda_m^* \geq 0$. Далее, учитывая, что $J'(u), g_i(u)$

непр., и $u_k \rightarrow u_*$, и из (15) при $k \rightarrow \infty$, получим

$$\langle \lambda_0^* (J'(u_*) + 0) + \sum_{i=1}^s \lambda_i^* g_i'(u_*), 0 - u_* \rangle = \langle \frac{\partial L(u_*, \bar{\lambda}^*)}{\partial u}, 0 - u_* \rangle \geq 0,$$

$\forall u \in U$. Вариац. кер-во доказано.

Далее дока-м усл-е дополнител. нежесткости $(\lambda_i^* g_i(u_*) = 0)$

1) $g_i(u_*) \neq 0 \rightarrow$ верно

2) $g_i(u_*) = 0 \Rightarrow g_i(u_k) < 0 \Rightarrow \forall k \geq k_1 \quad g_i(u_k) < 0$

$\lambda_{ik} = 2 \lambda_k \max\{g_i(u_k), 0\} = 0 \Rightarrow \lambda_{ik} = \lambda_{0k} \mu_{ik} = 0$ при $k \geq k_1$

$\lambda_{ik} g_i(u_k) = 0 \Rightarrow \bar{\lambda}^* g_i(u_*) = 0$ ■

В/з (необязательно, обсудим на след. паре)

1) $u = J(u) \rightarrow \inf, u \in U = \{u \in E^1: g(u) = u^2 \leq 0\};$

2) $J(u) = -u \rightarrow \inf, \dots$